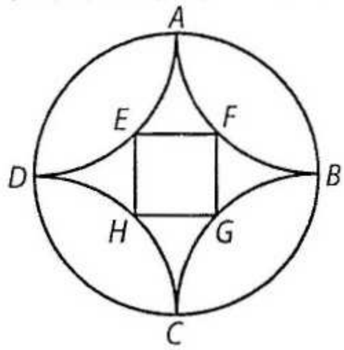
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
01.03.2014 - VIII РАЗРЕД

1. Реши једначину $|x| + |2x - 5| = 4$.

2. Краћа дијагонала правилне шестостране призме је 12cm и заклапа са равни основе угао од 30°. Израчунај површину и запремину те призме.

3. На датој слици, велика кружница има полупречник 1cm. Лукови *AFB*, *BGC*, *CHD* и *DEA* су четвртине кружница полупречника 1cm. Квадрат *EFGH* је тако постављен да је добијена слика осно симетрична. Израчунај дужину странице тог квадрата.



4. Колико има природних бројева не већих од 1000 који у свом запису имају бар једну цифру 1?

5. Да ли постоји четвороцифрени број који се повећа 4 пута кад се његове цифре испишу обрнутим редом?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. Знаци бројева у апсолутним вредностима се мењају око 0 и $\frac{5}{2}$ па разматрамо три случаја:

Ако је $x < 0$ једначина постаје $-x - 2x + 5 = 4$. Њено решење је $x = \frac{1}{3}$ што није мање од 0 па ово није решење.

Ако је $0 \leq x < \frac{5}{2}$ једначина постаје $x - 2x + 5 = 4$. Њено решење је $x = 1$ што јесте решење једначине.

Ако је $x \geq \frac{5}{2}$ једначина постаје $x + 2x - 5 = 4$. Њено решење је $x = 3$ што јесте решење једначине. Дакле, решења су 1 и 3 (**20 бодова**. Ако ученик закључи да једначина има 3 решења бодовати са 10 бодова).

2. (МЛ 48/2) Угао између краће дијагонале и висине призме је 60° па је висина 6cm (**4 бода**). Краћа дијагонале основе и призме и висина формирају правоугли троугао, па је краћа дијагонала основе $6\sqrt{3}$cm (**4 бода**). Ако је основна ивица призме a, тада је краћа дијагонала једнака $a\sqrt{3}$, одакле је $a = 6$ (**4 бода**). Сада је $P = 54(\sqrt{3}+4)\text{cm}^2$ (**4 бода**), $V = 324\sqrt{3}\text{cm}^3$ (**4 бода**).

3. Центри датих четвртина кружница су темена квадрата странице 2, описаног око датог великог круга (**8 бодова**). Због претпостављене осне симетрије, тачке E и F припадају дијагонали тог описаног квадрата (**6 бодова**). Даље се лако рачуна да је $EG = 2\sqrt{2} - 2$ и $EF = 2 - \sqrt{2}$ (**6 бодова**).

4. Одредићемо колико има бројева до 1000 који у свом запису немају цифру 1 (**6 поена**). Таквих једноцифрених бројева има 8, двоцифрених $8 \cdot 9 = 72$, троцифрених $8 \cdot 9 \cdot 9$. Дакле, укупно их је $8 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9 \cdot 9 = 728$ (**12 бодова**). Тражених бројева има $1000 - 728 = 272$ (**2 бода**).

5. (МЛ 48/2) Нека је дати број $\overline{abcd}$. Ако је $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$, онда је $a \leq 2$. Не може бити $a = 1$, јер би се онда број $\overline{dcba}$, који је дељив са 4, завршавао непарном цифром 1. Дакле, $a = 2$ (**6 бодова**). Тада је $d = 8$ или $d = 9$. Не може бити $d = 9$, јер се производ $4 \cdot 9 = 36$ не завршава цифром 2. Дакле, $d = 8$ (**6 бодова**). Како цифра b не може бити већа од 2, због преноса са места стотина, провером закључујемо да ни $b = 0$, ни $b = 2$ не дају решења. За $b = 1$ имамо $4 \cdot \overline{21c8} = \overline{8c12}$, одакле је $c = 7$, јер је $4 \cdot 2178 = 8712$. Дакле, тражени број постоји (**8 бодова**).