Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа 28.02.2015.

VII РАЗРЕД

1. Израчунај
$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(7-x)^2}-(x-\sqrt{5})\cdot(7-x)$$
за $x=7+\sqrt{5}$.

2. Када се три последње цифре шестоцифреног броја a преместе на почетак, у истом поретку, добије се 6 пута већи број. Одреди број a.

3. Средња линија трапеза дели површину трапеза у односу 7 : 5. Израчунај однос дужина основица тог трапеза.

4. Одреди површину троугла ABC ако су његова тежишна линија BM и симетрала угла AL ($L\in BC$) узајамно нормалне и при томе је $AL=k$ и $BM=m$.

5. Одреди вредности природних бројева x и y тако да је
$$2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot \ldots \cdot 2^7=x^y.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

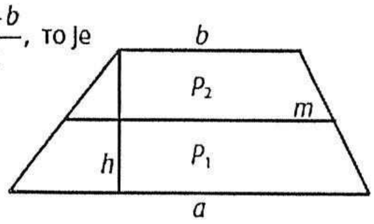
1. (МЛ 49/1) $7+6\sqrt{5}$ **(20 поена).**

2. Треба уствари решити ребус $ABCDEF \cdot 6 = DEFABC$. Означимо број ABC са x, а број DEF са y. Тада је $6 \cdot (1000x + y) = 1000y + x$, тј. $6000x + 6y = 1000y + x$, где су x и y бројеви са највише 3 цифре (**5 поена**). Даље је $5999x = 994y$ (**2 поена**), $857x = 124y$ (**5 поена**). Како су 857 и 142 узајамно прости бројеви, једино решење је $x = 142$ и $y = 857$. Тражени број је 142857 (**8 поена** уз обавезно образложење).

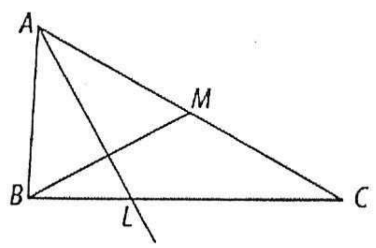
3. (МЛ 47/5) Како је $P_1 : P_2 = 7 : 5$ и $m = \frac{a+b}{2}$, то је

$$\left(\frac{a+m}{2}\cdot\frac{h}{2}\right):\left(\frac{m+b}{2}\cdot\frac{h}{2}\right)=7:5$$ (**5 поена**).

Сређивањем добијамо $(3a+b):(a+3b) = 7 : 5$ (**8 поена**), одакле је $a : b = 2 : 1$ (**7 поена**).



4. У троуглу ABM је симетрала угла код A нормална на наспрамну страницу, па је тај троугао једнакокрак, $AB = AM$ ($= MC$) (**4 поена**). Четвороугао $ABLM$ је са нормалним дијагоналама, па је његова површина $P_{ABLM} = \frac{1}{2}km$ (**4 поена**).



Троугао ABL је подударан троуглу AML (СУС), па је $P_{ABL} = P_{AML} = \frac{1}{4}km$ (**4 поена**). С обзиром да је $AM = MC$ то је $P_{AML} = P_{CML}$ (**4 поена**) и $P_{ABC} = \frac{3}{4}km$ (**4 поена**).

5. (МЛ 49/2) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot ... \cdot 2^7 = 2^{1+2+...+7} = 2^{28}$ (**8 поена**). Како је $28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$, то су тражена решења дата у табели (Свако решење **по 2 поена.** За свако нетачно решење –1 поен. Укупан број поена у задатку не може бити негативан.).

x	2	2^2	2^4	2^7	2^{14}	2^{28}
y	28	14	7	4	2	1