Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
01.03.2014.

VII РАЗРЕД

1. Израчунај површину правоуглог троугла обима $(60+20\sqrt{3})\text{cm}$ чији је један оштри угао $30°$.

2. Да ли је број $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-1+\sqrt{2}$ рационалан или ирационалан?

3. Дат је троугао ABC. Тежишне дужи $t_a = 6\text{cm}$ и $t_b = 10\text{cm}$ су међусобно нормалне. Израчунај површину тог троугла.

4. Одреди све вредности природног броја n за које важи
$$(5\sqrt{2})^n < (2\sqrt{5})^4.$$

5. Производ три узастопна непарна броја је 5 пута мањи од броја $\overline{bababa}$. Који су то бројеви?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. Ако је краћа катета тог троугла а, онда је дужа $a\sqrt{3}$, а хипотенуза $2a$, па је $60+20\sqrt{3}=3a+a\sqrt{3}=a(3+\sqrt{3})$, одакле је a = 20cm (**15 бодова**). Површина је $P=\frac{1}{2}a\cdot a\sqrt{3}=200\sqrt{3}\text{cm}^2$ (**5 бодова**).

2.
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-1+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}-1+2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=1.$$
Дакле, дати број је рационалан (**20 бодова**).

3. Нека су $AD=t_a$ и $BE=t_b$ тежишне дужи датог троугла ABC. Тада је $ED \parallel AB$, $ED=\frac{1}{2}AB$ и $P_{ABC}=4P_{EDC}$ (**8 бодова**). Како је $ABDE$ четвороугао са нормалним дијагоналама, то је $P_{ABDE}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10=30\text{cm}^2$ (**8 бодова**), па је $P_{EDC}=10\text{cm}^2$ и $P_{ABC}=40\text{cm}^2$ (**4 бода**).

4. (МЛ 48/2) Треба одредити све вредности n за које је $(5\sqrt{2})^n<400$. Како је $5^4=625$, n највише може бити 3. Тада је
$$(5\sqrt{2})^3=250\sqrt{2}<250\cdot 1{,}5=375<400.$$
Дакле, n може имати вредност 1, 2 и 3 (**20 бодова**).

5. (**МЛ 48/2**) $\overline{bababa}=\overline{ba}\cdot 10101=\overline{ba}\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37=\overline{ba}\cdot 7\cdot 37\cdot 39$, па је $(\overline{ba}\cdot 7):5$ једнако 35 или 41 (**13 бодова**). Како 41 није дељиво са 7, следи да је $\overline{ba}=25$. Тражени бројеви су 35, 37 и 39 (**7 бодова**).