Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
28.02.2015.

VI РАЗРЕД

1. На писменом задатку из математике требало је да се израчуна вредност следећег израза:

$$\frac{13}{31}-\frac{31}{13}+\frac{389}{403}-31{,}13+13{,}31.$$

Трећина ученика је добила резултат −18,82; две седмине ученика је добило резултат −45,44, а преосталих 8 ученика није решавало задатак. Колико ученика је тачно урадило задатак?

2. У троуглу ABC је $\measuredangle ACB = 90°$. Ако симетрала хипотенузе и тежишна линија CC_1 заклапају угао од 50°, израчунај углове троугла ABC.

3. Докажи да не постоје цифре a, b, c, d и e, такве да је

$$\overline{abcd}{,}e\cdot e=\overline{cadeb}.$$

4. Бака има 10 унучади и сви имају различит број година. Алиса је најстарија. Ако је збир година свих унучади 180, колико најмање Алиса може имати година?

5. Докажи да је центар уписаног круга троугла најближи оном темену тог троугла које је уједно теме његовог највећег угла.

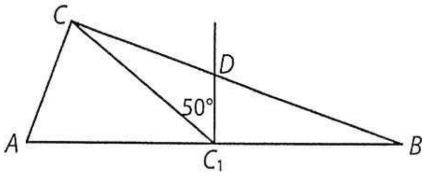
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Вредност датог израза је $-18{,}82$ (**9 поена**). Из услова задатка видимо да $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{7}=\frac{8}{21}$ ученика није решавало задатак. Ако је број ученика у одељењу x имамо да је $\frac{8}{21}x=8$, па у одељењу има 21 ученик (**9 поена**). Дакле задатак је тачно урадило $21:3=7$ ученика (**2 поена**).

2. $\measuredangle AC_1D=90°$, па је $\measuredangle AC_1C=40°$ (**5 поена**). Троуглови ACC_1 и BCC_1 су једнакокраки, па је $\measuredangle C_1AC=\measuredangle C_1CA=70°$, $\measuredangle C_1BC=\measuredangle C_1CB=20°$. Дакле, углови троугла су 90°, 70° и 20° (**15 поена**).



3. Како је $\overline{abcd,e}=\overline{abcd}+\frac{1}{10}e$, то је $\left(\overline{abcd}+\frac{1}{10}e\right)\cdot e=\overline{cadeb}$ (**3 поена**), $\frac{1}{10}e\cdot e=\overline{cadeb}-\overline{abcd}\cdot e$ (**3 поена**). Разлика на десној страни последње једнакости је природан број, па и лева страна мора бити природан број (**6 поена**), а то је могуће само за $e=10$ (**4 поена**). Како су a, b, c, d и e цифре, закључујемо да тражене цифре не постоје (**4 поена**).

4. (**МЛ 48/5**) Да би Алиса имала најмање година, сви остали морају имати максималан могући број година. Ако Алиса има n година, остали највише могу да имају $n-1$, $n-2$, ..., $n-9$ година. Тада важи да је $10n-45=180$, одакле је $n=22{,}5$, па закључујемо да Алиса најмање може имати 23 године (**20 поена**).

5. (**МЛ 48/4**) Нека је ABC дати троугао и нека је $\gamma\geq\alpha\geq\beta$ (слика). Тачка O је центар уписаног круга и праве AO, BO и CO су редом симетрале углова α, β и γ. Растојања центра O од темена троугла су OA, OB и OC, па треба да докажемо да је $OC\leq OA$ и $OC\leq OB$. У троуглу BCO за углове BCO и CBO важи да је $\measuredangle BCO\geq\measuredangle CBO$, па следи да је $OC\leq OB$. У троуглу AOC је $\measuredangle ACO\geq\measuredangle CAO$ па је $OC\leq OA$. Дакле, центар уписаног круга је најближи темену највећег угла троугла (**20 поена**).