Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа
28.03.2015.

VIII разред

1. Тачка A је пресек графика функције $y=\frac{3}{4}x+12$ са x-осом, а тачка B је пресек графика функције $y=-\frac{4}{3}x+12$ са x-осом. Тачка C је пресек та два графика.
а) Докажи да је троугао ABC правоугли;
б) Израчунај обим и површину тог троугла.

2. Свака страна коцке подељена је на 9 једнаких квадрата. Да ли је могуће у сваки квадрат уписати неки цео број тако да за сваки квадрат важи: збир пет бројева – броја уписаног у тај квадрат и четири броја уписаних у њему суседне квадрате – једнак је 17? (Два квадрата су суседна ако имају заједничку ивицу, укључујући и случај када ти квадрати не припадају истој страни коцке.)

3. У паралелограму $ABCD$ кружница описана око троугла BCD сече дијагоналу AC по други пут у тачки M. Ако је однос површина троугла BDM и паралелограма $1 : 18$, одреди однос дужина дијагонала паралелограма.

4. Докажи да је број $2015^{12}+2^{10}$ сложен.

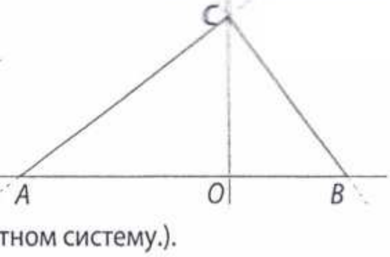
5. Дат је правилни тетраедар $ABCD$ чија ивица има дужину a. Раван δ садржи тачку D и пресеца ивице AB и BC тако да је пресек тетраедра и равни δ троугао. Докажи да је обим пресечног троугла већи од $2a$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

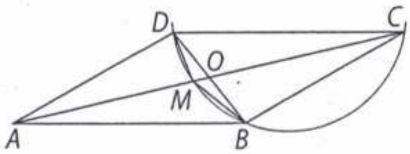
1. Координате пресечних тачака су $A(-16, 0)$, $B(9, 0)$, $C(0, 12)$ (**5 поена**). Дужине страница троугла су $AB = 25\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$ (**5 поена**).



а) Како је $25^2 = 20^2 + 15^2$, троугао ABC је правоугли (**5 поена**. Признати и ако ученици без израчунавања дужина страница искористе познати услов нормалности две праве у координатном систему.).
б) $O = 60\text{cm}$, $P = 150\text{cm}^2$ (**5 поена**).

2. Не. Сваком квадрату суседна су 4 квадрата који с њим образују „крст". Сваки квадрат укључен је у 5 крстова. Ако је збир бројева у сваком крсту 17, онда је петоструки збир свих написаних бројева $17 \cdot 54$, што је контрадикција, јер тај број није дељив са 5 (**20 поена**).

3. $P_{ABCD} : P_{BDM} = 18 : 1$. Како је $P_{ABCD} : P_{ABD} = 2 : 1$, то је $P_{ABD} : P_{BDM} = 9 : 1$, а одавде је $OA : OM = 9 : 1$ (**5 поена**). Такође, $\measuredangle DBM = \measuredangle DCM$ (периферијски над истом тетивом) и $\measuredangle BAO = \measuredangle DCM$ (са паралелним крацима) па је $\measuredangle OBM = \measuredangle BAO$ (**5 поена**) и троуглови OMB и OBA су слични (**5 поена**). Сада је $OM : OB = OB : OA$, па је $OB^2 = \frac{1}{9}OA^2$, тј. $OB = \frac{1}{3}OA$. Дакле, $AC : BD = 3 : 1$ (**5 поена**).



4. $2015^{12} + 2^{10} = (2015^6 + 2^5)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 2015^6$ (**8 поена**) $= (2015^6 + 2^5)^2 - (2^3 \cdot 2015^3)^2 = (2015^6 + 2^5 - 2^3 \cdot 2015^3)(2015^6 + 2^5 + 2^3 \cdot 2015^3)$. Дакле, како су оба чиниоца већа од 1, дати број је сложен (**12 поена**).

5. **(МЛ 47/4)** Посматрајмо правилни тетраедар $ABCD$. Нека раван δ пресеца ивице AB и BC редом у тачкама M и N (слика лево). Ако развијемо мрежу тетраедра (слика десно) онда је јасно да је обим пресечног троугла $O = DM + MN + DN = D_2M + MN + ND_3 > D_2D_3 = 2a$, јер је дуж D_2D_3 најкраће растојање између тачака D_2 и D_3 (**20 поена**).