Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
05.04.2014.

VIII разред

1. Докажи да је за сваки природан број n вредност израза $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}$ цео број.

2. Које године двадесетог века је рођен човек који ове године пуни онолико година колики је производ цифара године његовог рођења?

3. У правилну четворострану пирамиду уписана је коцка. Једна основа коцке је у равни основе пирамиде, а темена друге основе су у тежиштима бочних страна пирамиде. Колико пута је запремина пирамиде већа од запремине ове коцке?

4. Нека је ABC једнакостранични троугао, L тачка на страници AB, K тачка на страници BC и M пресек дужи AK и CL. Докажи: Ако се око четвороугла $BKML$ може описати кружница, онда је његова површина једнака површини троугла CAM.

5. У круг су уписани квадрат и правилни петоугао тако да им се темена не поклапају. Докажи да међу 9 лукова на које та темена деле кружницу постоји бар један којем одговара централни угао не већи од 9°.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

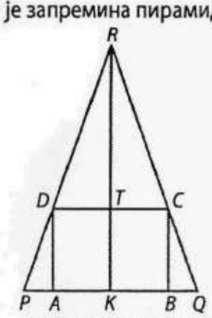
Решење

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу.

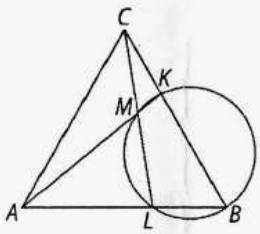
1. $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}=\frac{n^3+3n^2-4n}{6}=\frac{n^3+3n^2+2n-6n}{6}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}-n$ (**10 бодова**). Даље је $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n+1)(n+2)$. Како је међу три узастопна природна броја увек један дељив са 3 и барем један дељив са 2, добијени производ је сигурно дељив са 6 па је $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ природан број, а онда је и $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}-n$ цео број (**10 бодова**).

2. (МЛ 48/3) Година рођења је облика $\overline{19xy}$. По претпоставци задатка је $1900 + 10x + y + 1 \cdot 9 \cdot x \cdot y = 2014$, одакле је $10x + y + 9 \cdot x \cdot y = 114$ (**5 бодова**). Лако се види да је $x > 1$, $y > 1$ (случајеви $x = 1$ и $y = 1$ се лако елиминишу) и $x \cdot y < 12$ (јер је $9 \cdot 12 + 10 > 114$). Следи $x < 6$, $y < 6$ (**5 бодова**). Преостају следеће могућности за $\overline{xy}$: 22, 23, 24, 25, 32, 33, 42, 52. Провером налазимо да само за $\overline{xy}=33$ и $\overline{xy}=42$ важи $1933 + 1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 3 = 2014$ и $1942 + 1 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 2 = 2014$. Човек је рођен 1933. (**5 бодова**) или 1942. године (**5 бодова**).

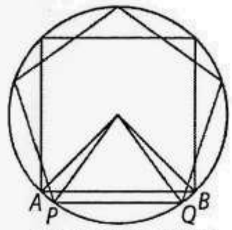
3. Ако пресечемо пирамиду равни која садржи њену висину и паралелна је једној основној ивици, добијамо пресек са слике. Ако основну ивицу пирамиде означимо са b, висину са H, а ивицу коцке са a, тада је $PQ = b$, $BC = a$, $DC = a\sqrt{2}$, $RK = H$ (**5 бодова**). Како су темена једне основе коцке у тежиштима бочних страна пирамиде, важи да су троуглови RTC и RKQ слични и $RC : CQ = 2 : 1$, па је $RT : TK = 2 : 1$, $RT = 2a$, $H = RK = 3a$ (**5 бодова**). Такође, како је $RC : RQ = 2 : 3$, то је $TC : KQ = 2 : 3$, одакле је $b=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ (**5 бодова**). Сада је запремина пирамиде $V=\frac{9}{2}a^3$, па је запремина пирамиде 4,5 пута већа од запремине коцке (**5 бодова**).



слика уз задатак 3



слика уз задатак 4



слика уз задатак 5

4. Ако је четвороугао $BKML$ тетиван, збир наспрамних углова је 180°, па је $\measuredangle MLB = 180° - \measuredangle MKB = \measuredangle MKC$ (**5 бодова**). У троугловима AKC и CLB једнака су по два унутрашња угла ($\measuredangle CLB = \measuredangle AKC$, $\measuredangle CBL = \measuredangle ACK = 60°$) и преостали трећи углови су им једнаки. У овим троугловима једнаке су по једна страница и два налегла угла, па су подударни и имају једнаке површине (**10 бодова**). Сада је $P_{\Delta CAM} = P_{\Delta AKC} - P_{\Delta CKM} = P_{\Delta CLB} - P_{\Delta CKM} = P_{BKML}$ (**5 бодова**).

5. Кружном луку изнад једне странице квадрата одговара централни угао од 90°, а изнад једне стране правилног петоугла угао од 72°. На једном кружном луку изнад странице квадрата, на пример AB, морају се наћи два темена правилног петоугла, на пример P и Q (види слику). Збир централних углова којима одговарају лукови AP и BQ је 90° – 72° = 18°. Посматрајмо мањи од ових лукова. Мањем луку одговара мањи централни угао, а како је њихов збир 18°, централни угао над мањим луком биће мањи од 9°. Ако су лукови једнаки, једнаки су и централни углови, по 9°, па у оба случаја важи тврђење задатка (**20 бодова**).