Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
28.03.2015.

VII разред

1. Између једног природног броја и двоструке вредности његовог квадрата има 11174 природна броја. Одреди тај природан број.

2. Шта је веће: $5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^{5}$ или $13^{5} \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}$?

3. Нека су M, N, P, Q редом тачке на страницама AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ такве да је $AM = NC = PD = QA$. Докажи да је

$$\measuredangle PNC = \measuredangle NQM.$$

4. Дат је правилан осмоугао $A_1A_2...A_8$ чији је полупречник описаног круга 6cm и правоугаоник A_1MNA_7 (у коме лежи теме A_4 осмоугла) тако да осмоугао и правоугоник имају једнаке површине. Израчунај површину дела правоугаоника који је изван осмоугла.

5. Из скупа {1, 2, ..., 2014, 2015} одабрано је 1011 бројева. Докажи да међу изабраним бројевима постоје два која се разликују за 5.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

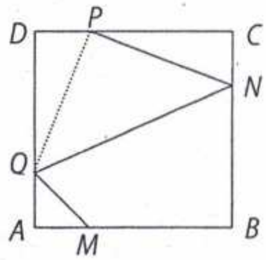
VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

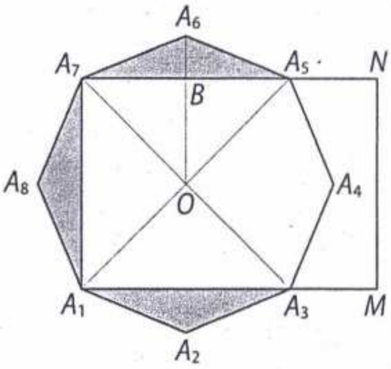
1. (МЛ 49/2) Између природних бројева a и b налази се $a - b - 1$ природних бројева. Ако посматрани природни број обележимо са x, тада је $2x^2 - x - 1 = 11174$ (**8 поена**), па је $x(2x - 1) = 11175$ (**4 поена**). Како је $11175 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 149$, то је $x = 75$ и $2x - 1 = 149$, па је тражени број 75 (**8 поена**).

2. Како је $\dfrac{5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^5}{13^5 \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}} = \dfrac{13^{26}}{31^8 \cdot 5^{18}}$ (**4 поена**) $= \dfrac{13^{16} \cdot 13^{10}}{31^8 \cdot 5^8 \cdot 5^{10}} = \left(\dfrac{169}{155}\right)^8 \cdot \left(\dfrac{13}{5}\right)^{10}$ (**12 поена**) $\dfrac{169}{155} > 1$ и $\dfrac{13}{5} > 1$, то је $\dfrac{5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^5}{13^5 \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}} > 1$, па је $5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^5 > 13^5 \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}$ (**4 поена**).

3. Троуглови CNP и DPQ су подударни јер су правоугли и $CN = DP$, $CP = DQ$ $(CD - DP = DA - AQ)$, па је $NP = PQ$ и заклапају прав угао. Сада је $\measuredangle QNP = 45° = \measuredangle AQM$ (**8 поена**). $\measuredangle CNQ$ и $\measuredangle NQA$ су углови на трансверзали и једнаки (**8 поена**), па је $\measuredangle CNP = \measuredangle CNQ - 45° = \measuredangle NQA - 45° = \measuredangle NQM$ (**4 поена**).



4. Површина правоугаоника изван осмоугла једнака је збиру површина три подударна осенчена троугла (због једнакости површина) (**8 поена**). Одредимо површину једног осенченог троугла. Како је четвороугао $A_1A_3A_5A_7$ квадрат и $OA_7 = OA_6 = OA_5 = 6$cm, то је $A_5A_7 = 6\sqrt{2}$cm (**4 поена**), $OB = 3\sqrt{2}$cm, $A_6B = 3 \cdot (2 - \sqrt{2})$cm (**4 поена**) па је тражена површина $54 \cdot (\sqrt{2} - 1)\text{cm}^2$ (**4 поена**).



5. Скуп $\{1, 2, ..., 2014, 2015\}$ је унија пет дисјунктних скупова од којих сваки има 403 елемента: $A_1 = \{1, 6, ..., 2011\}$, ..., $A_5 = \{5, 10, ..., 2015\}$ (**5 поена**). Како је $1011 = 5 \cdot 202 + 1$, на основу Дирихлеовог принципа постоји скуп A_i, $1 \le i \le 5$, из ког су одабрана бар 203 елемента (**10 поена**). То значи да у скупу A_i постоје бар два суседна елемента која су одабрана, а они се разликују за 5 (**5 поена**).