Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

05.04.2014.

VII разред

1. Са D_n обележавамо број свих дијагонала конвексног многоугла са n страница. Ако је $D_{4n} : D_n = 19$, израчунај $D_{2n} : D_n$.

2. Одреди цео број a такав да су
$$m = (3a-2)(a-1) \quad \text{и} \quad n = a(2a-1)$$
узастопни парни бројеви.

3. Правилан дванаестоугао $A_1A_2...A_{12}$ уписан је у кружницу полупречника 10cm. Израчунај површину четвороугла $A_1A_3A_4A_5$.

4. У трапезу $ABCD$ са основицама AB и CD симетрале унутрашњих углова код темена A и D секу се на краку BC. Докажи да важи
$$AD = AB + CD.$$

5. Дата су четири броја: $ABBCD$, BAC, AC, C. Почевши од другог, сваки број је једнак производу цифара претходног. Одреди о којим бројевима је реч. (У бројевима су једнаке цифре замењене истим словима, а различите различитим).

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

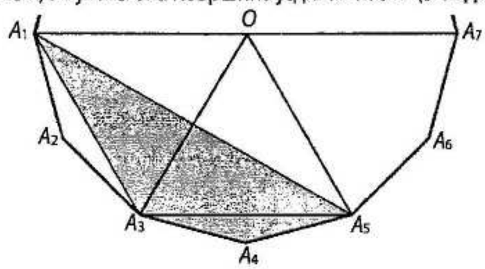
Решење

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. (МЛ 48/2) Укупан број дијагонала конвексног n-тоугла је $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ **(3 бода)** па важи: $\frac{D_{4n}}{D_n} = \frac{4n(4n-3)}{n(n-3)} = 19$. Одавде је $4(4n - 3) = 19(n - 3)$, одакле је $n = 15$ **(15 бодова)** и $\frac{D_{30}}{D_{15}} = \frac{30\cdot(30-3)}{15\cdot(15-3)} = \frac{9}{2}$ **(2 бода)**.

2. За узастопне парне бројеве m и n важи $|m - n| = 2$. Сада је $|m - n| = |a^2 - 4a + 2| = 2$ **(6 бодова)**. Ако је $a^2 - 4a + 2 = 2$, тада је $a^2 - 4a = 0$, одакле је $a = 4$ **(4 бода)** или $a = 0$ **(4 бода)**. Ако је $a^2 - 4a + 2 = -2$, тада је $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 = 0$, одакле је $a = 2$ **(6 бодова)**.

3. Тетива A_3A_5 паралелна је пречнику A_1A_7, па су теме A_1 и центар кружнице O на једнаком растојању од праве A_3A_5 **(5 бодова)** (слика). Површина четвороугла $A_1A_3A_4A_5$ једнака је збиру површина троуглова $A_3A_4A_5$ и $A_1A_3A_5$. С друге стране, површина троугла $A_1A_3A_5$ једнака је површини троугла OA_3A_5 (заједничка основица и једнаке висине), па је тражена површина једнака површини делтоида $OA_3A_4A_5$ **(10 бодова)**. Тај делтоид има узајамно нормалне дијагонале дужине 10cm, па је његова површина једнака 50cm^2 **(5 бодова)**.



4. Означимо пресек симетрала углова код темена A и D са E и одредимо тачку F на страници AD такву да је $\measuredangle CED = \measuredangle DEF$. Таква тачка постоји јер је $\measuredangle AED$ прав, па је $\measuredangle CED$ оштар. Троуглови CDE и FDE су подударни (заједничка страница и два налегла угла), па је $\measuredangle DCE = \measuredangle DFE$ и $DF = CD$ **(10 бодова)**. Сада је $\measuredangle ABE = 180° - \measuredangle DCE = 180° - \measuredangle DFE = \measuredangle AFE$. Како троуглови ABE и AFE имају једнака два унутрашња угла, једнаки су и трећи, па је $\measuredangle FEA = \measuredangle BEA$. Троуглови ABE и AFE су подударни (заједничка страница и два налегла угла), па је $AB = AF$. Сада је $AD = AF + FD = AB + CD$, што је и требало доказати **(10 бодова)**.

5. Како је $A \cdot C = C$, то је $C = 0$ или $A = 1$. Ако је $C = 0$, тада је и производ цифара броја $ABBCD$ једнак 0, што није тачно. Дакле, $A = 1$ **(5 бодова)**. Како је $B \cdot C = \overline{1C}$ то C може бити или 2 или 5 **(5 бодова)**. Ако је $C = 2$, тада је $B = 6$ и производ цифара броја $ABBCD$ је 612. Али тај производ не може бити 612 јер број 612 има прост делилац 17, те у овом случају нема решења **(5 бодова)**. Ако је $C = 5$, тада је $B = 3$ и $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot D = 315$, одакле је $D = 7$, па су тражени бројеви 13357, 315, 15, 5 **(5 бодова)**.