Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
05.04.2014.

VI разред

1. Вредност израза $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ је 2014. Колико чинилаца има у датом производу?

2. Одреди најмањи природан број који се завршава са 13, дељив је са 13 и има збир цифара 13.

3. Конструиши троугао ABC ако је $h_a = 3\text{cm}$, $t_a = 3{,}5\text{cm}$, $\beta = 30°$.

4. Нека је ABC произвољни оштроугли троугао, а тачке D и E, редом, подножја висина из темена A и B. Докажи да се симетрале дужи DB и EA секу на страници AB.

5. Филип саставља троуглове од палидрваца. Колико различитих троуглова може да састави ако за један троугао сме да употреби највише 10 (међусобно једнаких) палидрваца?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Решење

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. (МЛ 47/4) Имамо да је

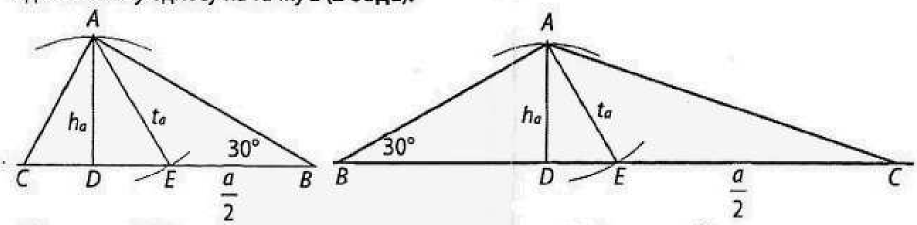
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}=\frac{n+1}{2}$$ **(15 бодова).**

Како је $\frac{n+1}{2}=2014$, то је $n=4027$. Дакле, у датом изразу је 4026 чинилаца (**5 бодова**).

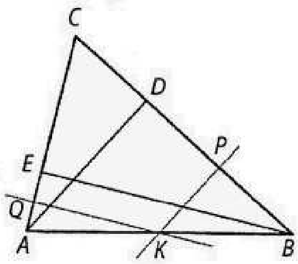
2. Нека је тражени број $\overline{A13}$. Како је $\overline{A13}=100A+13$ и како $13\mid(100A+13)$, то $13\mid 100A$, односно $13\mid A$ (**5 бодова**). Са друге стране збир цифара броја $\overline{A13}$ је 13, па је збир цифара броја A једнак 9, одакле је и број A дељив са 9 (**10 бодова**). Најмањи број A који је дељив и са 13 и са 9 је 117, па је тражени број $\overline{A13}=11713$ (**5 бодова**).

Напомена: Ако ученик дође до решења „систематским пробањем", бодовати максималним бројем бодова.

3. У троуглу ABC познате су висина и тежишна дуж из темена A па је могуће конструисати правоугли троугао ADE у коме су познате катета и хипотенуза. Конструкцијом овог троугла добијамо теме A троугла (**6 бодова**). Троугао ADB је правоугли. Позната је једна катета и унутрашњи углови (30°, 60°, 90°) па га можемо конструисати. За теме B може да важи D-E-B (слика лево) (**6 бодова**) или B-D-E (слика десно) (**6 бодова**). Како је E средиште дужи BC, теме C добијамо преношењем дужине дужи BE из темена E на праву BE на супротну страну од темена B у односу на тачку E (**2 бода**).



4. Троугао ADB је правоугли, јер је AD висина троугла ABC. Симетрала странице DB је нормална на страницу BD, па је паралелна страници AD (**5 бодова**). Означимо пресек нормале са страницом BC са P, а са страницом AB са K. Дуж PK садржи средиште странице DB, паралелна је са AD па је онда средња линија троугла ADB. То значи да је тачка K средиште дужи AB (**10 бодова**). Аналогно, у троуглу ABE симетрала странице AE сече страницу AB у средишту, па и она садржи тачку K. Дакле, симетрале дужи DB и AE секу се на страници AB и то у њеном средишту (**5 бодова**).



5. Троуглове можемо саставити од 3, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 палидрваца (Немогуће је са 4 јер не постоји троугао са страницама 1, 1 и 2 палидрвца). Све могућности за дужине страница су: (1,1,1), (1,2,2), (2,2,2), (1,3,3), (2,2,3), (2,3,3), (1,4,4), (2,3,4), (3,3,3), (2,4,4), (3,3,4).

Дакле, може да састави 11 троуглова (За n тачних решења дати **2(n – 1) бодова**. Ако су наведени и погрешни одговори, на пример 1, 2, 3, за сваки такав одговор одузети 2 бода, с тим да укупан збир буде ненегативан.).