Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

12.03.2022.

V разред

1. Углови α и β су суплементни, а углови β и γ комплементни. Збир углова α и γ је 123°. Израчунај углове α, β и γ.

2. Колико има трочланих подскупова скупа

$$A=\left\{\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11},\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{8}{11},\frac{9}{11},\frac{10}{11}\right\}$$

у којима је збир најмањег и највећег елемента једнак 1?

3. Вања је замислила три броја. НЗД првог и другог броја је 12, првог и трећег 8, а другог и трећег 20. Који су најмањи природни бројеви које је она могла да замисли?

4. Укупно 24 особе поделиле су 48 кроасана. Свако дете добило је по 8 кроасана, свака жена по 2, а сваки мушкарац по 1 кроасан. Колико је било деце, колико жена, а колико мушкараца који су поделили кроасане, ако је свако добио бар по један кроасан? Одреди сва решења.

5. Одреди све просте бројеве a, b и c такве да је

$$4a+5b+6c=96.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Из услова задатка је $\alpha + \beta = 180°$, $\beta + \gamma = 90°$ и $\alpha + \gamma = 123°$. Ако саберемо леве и десне стране једнакости и потом поделимо са 2, добијамо да је $\alpha + \beta + \gamma = 196°\ 30'$ [**8 бодова**]. Одузимањем прве три једнакости од добијене добијамо да је $\gamma = 16°\ 30'$ [**4 бода**], $\alpha = 106°\ 30'$ [**4 бода**] и $\beta = 73°\ 30'$ [**4 бода**].

2. Најпре одредимо парове разломака (најмањи и највећи), чији је збир 1. То су: $\left(\frac{1}{11}, \frac{10}{11}\right), \left(\frac{2}{11}, \frac{9}{11}\right), \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right), \left(\frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}\right)$ [**5 бодова**]. У подскупу са првим паром може бити 8 разломака [**2 бода**], са другим паром 6 [**2 бода**], са трећим 4 [**2 бода**], са четвртим 2 [**2 бода**], а ниједан разломак са последњим паром [**2 бода**]. Дакле, укупно има $8 + 6 + 4 + 2 = 20$ подскупова [**5 бодова**].

3. Нека су тражени бројеви a, b и c. Тада је НЗД$(a, b) = 12$, НЗД$(a, c) = 8$ и НЗД$(b, c) = 20$, па мора да важи: $12 \mid a$ и $8 \mid a$ [**3 бода**]; $12 \mid b$ и $20 \mid b$ [**3 бода**]; $8 \mid c$ и $20 \mid c$ [**3 бода**]. Како тражимо најмање вредности бројева a, b и c, следи да је $a =$ НЗС$(12, 8) = 24$ [**4 бода**], $b =$ НЗС$(12, 20) = 60$ [**4 бода**] и $c =$ НЗС$(8, 20) = 40$ [**3 бода**].

4. Означимо са D број деце, са Z број жена и са M број мушкараца. Како је $8D + 2Z + M = 48$ и $D + Z + M = 24$, одузимањем левих и десних страна једнакости добијамо да је $7D + Z = 24$ [**8 бодова**]. Заменом вредности за D у овој једнакости са 1, 2 и 3 добијамо следећа решења: $D = 1$, $Z = 17$, $M = 6$ [**4 бода**], $D = 2$, $Z = 10$, $M = 12$ [**4 бода**] и $D = 3$, $Z = 3$, $M = 18$ [**4 бода**].

5. (**МЛ 54/5**) Како су бројеви $4a$, $6c$ и 96 парни, то је $b = 2$ [**5 бодова**]. Полазна једнакост постаје $4a + 6c = 86$, односно $2a + 3c = 43$ [**2 бода**]. Како је $2a \geq 4$, то је $3c \leq 39$, тј. $c \leq 13$ [**5 бодова**], па је $c \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Директном провером добијамо да су решења: $c = 3$, $a = 17$ [**2 бода**]; $c = 7$, $a = 11$ [**2 бода**]; $c = 11$, $a = 5$ [**2 бода**]; $c = 13$, $a = 2$ [**2 бода**].