Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

07.03.2020.

VI разред

1. Одреди бројеве a, b и c ако се зна да је њихов збир већи од броја a за $\frac{5}{2}$, од броја b за $\frac{59}{6}$ и од броја c за $\frac{5}{3}$.

2. Колико има неподударних троуглова са целобројним дужинама страница (у центиметрима) обима 20 cm? Запиши дужине страница свих тих троуглова.

3. Збир двоцифрених бројева $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ дељив је са 33. Докажи да је и четвороцифрени број $\overline{abcd}$ дељив са 33.

4. Колико има седмоцифрених палиндрома чији је производ цифара паран? За број кажемо да је палиндром ако се чита исто и са леве и са десне стране, на пример 2014102.

5. Нека је D тачка на основици BC једнакокраког троугла ABC таква да је мера угла BAD једнака 2020 минута и E тачка на краку AC таква да је $AE = AD$. Одреди меру угла CDE.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Ако саберемо леве и десне стране једнакости

$$a+b+c=a+\frac{5}{2},\quad a+b+c=b+\frac{59}{6},\quad a+b+c=c+\frac{5}{3},$$

добијамо да је $2(a+b+c)=14$, односно $a+b+c=7$ [**11 поена**].

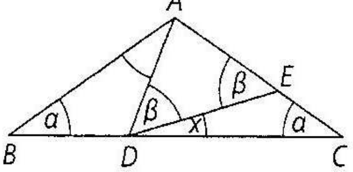
Заменом добијене вредности у прве три једначине добијамо $a=4\frac{1}{2}$, $b=-2\frac{5}{6}$, $c=5\frac{1}{3}$ [Свако тачно решење **по 3 поена**.]

2. Означимо са a, b, c дужине страница троугла, при чему је $a \le b \le c$. Бројеви a, b, c морају да задовољавају услов да је сваки мањи од збира друга два, а већи од апсолутне вредности њихове разлике [**4 поена**]. Водећи рачуна о томе и услову $a+b+c=20$ добијамо све могућности: (2, 9, 9), (3, 8, 9), (4, 7, 9), (4, 8, 8), (5, 6, 9), (5, 7, 8), (6, 6, 8), (6, 7, 7) [свако тачно решење **по 2 поена**. За свако нетачно решење, на пример (2, 3, 15) одузети 2 поена. Укупан број поена не може бити негативан].

3. $\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}$ [**5 поена**] $=99\overline{ab}+(\overline{ab}+\overline{cd})$ [**10 поена**].

Како $33\,|\,(\overline{ab}+\overline{cd})$ и $33\,|\,99$ то је и број $\overline{abcd}$ дељив са 33 [**5 поена**].

4. (**МЛ 54/2**) Седмоцифрени палиндроми су облика $\overline{abcdcba}$ па их укупно има колико има различитих бројева облика $\overline{abcd}$, односно 9 000 [**5 поена**]. Да бисмо израчунали колико има палиндрома чији је производ цифара паран, од укупног броја седмоцифрених палиндрома одузећемо број оних чији је производ цифара непаран. Ако је производ цифара непаран све цифре морају бити непарне, а таквих палиндрома има $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ [**5 поена**]. Дакле, тражени број палиндрома је $9\,000 - 625 = 8\,375$ [**10 поена**].



5. Троуглови ABC и ADE су једнакокраки па се могу увести ознаке $\measuredangle ABC = \measuredangle ACD = \alpha$, $\measuredangle ADE = \measuredangle AED = \beta$, $\measuredangle CDE = x$. Збир два унутрашња угла једнак је несуседном спољашњем углу, па је $x + \alpha = \beta$ и $\alpha + 2020' = \beta + x$ [**10 поена**]. Заменом вредности за β у другој једначини добијамо да је $x = 1010' = 16°\,50'$ [**10 поена**].