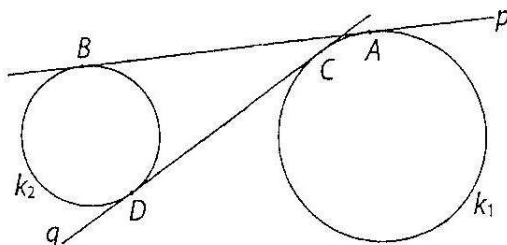


Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
07.03.2020.

VII разред

1. Да ли постоје природни бројеви x , y и z , такви да је $4^x + 9^y = 11^z$?
Образложи одговор.
2. Колико има петоцифрених природних бројева у чијем запису се појављује бар једна парна и бар једна непарна цифра?
3. Из скупа $\{2, 3, 4, 5\}$ бирају се три различита броја p , q и r . На колико начина се може постићи да број $p^{(q^r)}$ буде дељив са 8?
4. Права p додирује кругове k_1 и k_2 у тачкама A и B , а права q у тачкама C и D (види слику). Ако је полупречник круга k_1 једнак 3 cm, а полупречник круга k_2 једнак 2 cm, одреди вредност израза $AB^2 - CD^2$.



5. У правоуглом троуглу ABC , са правим углом у темену C , важи $BC = 3AC$. Нека су M и N тачке катете BC такве да је $BM = MN = NC$ и K средиште хипотенузе AB . Израчунај меру угла MKN .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

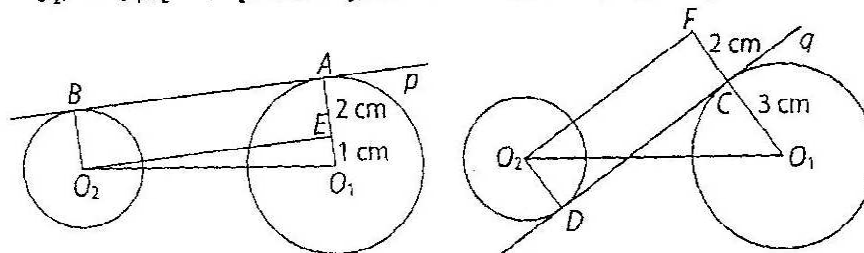
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Бројеви облика 4^x завршавају се цифром 4 или 6 [4 поена], бројеви облика 9^y цифрама 9 или 1 [4 поена], а бројеви облика 11^z цифром 1 [4 поена]. Дакле, збир $4^x + 9^y$ може се завршавати неком од цифара 3, 5 или 7 [4 поена] и не може бити једнак 11^z [4 поена].

2. Од укупног броја петоцифрених бројева одузећемо оне које у запису имају само парне и само непарне цифре. Укупно има 90 000 петоцифрених бројева [2 поена]. Петоцифрених бројева чије су све цифре парне има $4 \cdot 5^4 = 2\,500$ [6 поена], а чије су све цифре непарне $5^5 = 3\,125$ [6 поена]. Бројева у чијем запису је јавља бар једна парна и бар једна непарна цифра има $90\,000 - 2\,500 - 3\,125 = 84\,375$ [6 поена].

3. (МЛ 53/5) Да би број $p^{(q^r)}$ био дељив са 8 неопходно је да буде $p = 2$ [4 поена] или $p = 4$ [4 поена]. У оба случаја бројеви q и r се од преостала три броја скупа $\{2, 3, 4, 5\}$ могу изабрати на $2 \cdot 3 = 6$ начина [8 поена]. Дакле, укупан број тражених бројева је $6 + 6 = 12$ [4 поена].

4. У I случају (слика лево) применом Питагорине теореме у троуглу O_2O_1E налазимо $AB^2 = O_2E^2 = O_1O_2^2 - 1^2$ [6 поена]. У II случају (слика десно) применом Питагорине теореме у троуглу O_2O_1F налазимо $CD^2 = O_2F^2 = O_1O_2^2 - 5^2$ [6 поена]. $AB^2 - CD^2 = 24 \text{ cm}^2$ [8 поена].



5. Нека је тачка L средиште дужи BC . Тада је дуж KL средња линија троугла BCA , па је $KL \perp BC$ и $KL = \frac{1}{2} AC = ML = LN$

[10 поена]. Дакле, троуглови LMK и LNK су једнакокрако-правоугли, па је $\angle MKL = \angle NKL = 45^\circ$ [5 поена] и $\angle MKN = 90^\circ$ [5 поена].

