Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА 09.04.2011.

VIII РАЗРЕД

1. Израчунај површину фигуре ограничене правом $y = 4$ и графиком функције $y = |x+1| + |x-1|$.

2. Одреди вредност израза $a - b$ ако је
$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{2011^2}{4021} \quad \text{и} \quad b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \dots + \frac{2010^2}{4021}.$$

3. Права која садржи теме A троугла ABC сече страницу BC у тачки M, тако да је $BM : CM = 2012 : 2011$. Тежишна дуж CC_1 сече праву AM у тачки S. Одреди однос дужи CS и SC_1.

4. Реши једначину у скупу природних бројева:
$$65x^3 + 4y^3 = 2011.$$

5. Правилна четворострана пирамида $ABCDS$ основне ивице a и висине H пресечена је са равни α. Раван α сече основне ивице AB, AD и бочну ивицу AS редом у тачкама M, N, P тако да је
$$AM : MB = 1 : 1, AN : ND = 2 : 1, AP : PS = 3 : 1.$$
Израчунај размеру запремина делова пирамиде које одређује раван α.

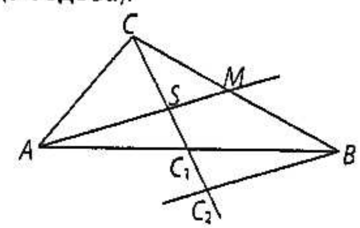
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗЕД

1. **(ML XLIV-5)** График функције ће имати три гране $y = \begin{cases} -2x, x < -1 \\ 2, -1 \le x < 1 \\ 2x, x \ge 1 \end{cases}$ **(10 бодова)** и образује са правом $y = 4$ једнакокраки трапез. Темена трапеза су тачке са координатама $(-1, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ и $(-2, 4)$. Основице трапеза су дужине 2 и 4, а висина трапеза дужи-не 2, па је површина трапеза $P = \frac{4+2}{2} \cdot 2 = 6$ **(10 бодова)**.

2. $$a - b = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2 - 1^2}{3} + \frac{3^2 - 2^2}{5} + \dots + \frac{2011^2 - 2010^2}{4021}$$
$$= \frac{1}{1} + \frac{3 \cdot 1}{3} + \frac{5 \cdot 1}{5} + \dots + \frac{4021 \cdot 1}{4021} = 2011 \text{ (20 бодова).}$$

3. Нацртајмо праву паралелну са AM која садржи тачку B и нека је пресек ове праве са CC_1 тачка C_2. Тада је $\Delta AC_1S \cong \Delta BC_1C_2$, па је $C_2C_1 = C_1S$. На основу Талесове теореме је $CM : MB = CS : 2SC_1$ **(15 бодова)** односно, $CS : SC_1 = 2011 : 1006$ **(5 бодова)**.



4. Бројеви x и $65x^3$ су исте парности, па x мора бити непаран број **(5 бодова)**. $x = 1$ није решење јер $2011 - 65$ није дељиво са 4, а $x \ge 5$ није решење јер је тада $65x^3 > 2011$ **(5 бодова)**. За $x = 3$ добијамо да је $y = 4$ решење дате једначине **(10 бодова)**.

5. Ако са H, B и V обележимо, редом, висину, површину основе и запремину почетне пирамиде, а са H_1, B_1 и V_1 висину, површину основе и запремину пирамиде $AMNP$, тада из $AP : PS = 3 : 1$ добијамо да је $H_1 = \frac{3}{4}H$ **(5 бодова)** а из $AM : MB = 1 : 1$, $AN : ND = 2 : 1$ добијамо да је $B_1 = \frac{1}{6}B$ **(5 бодова)**. Следи да је $V_1 = \frac{1}{8}V$ **(5 бодова)**, па је $V_1 : (V - V_1) = 1 : 7$ **(5 бодова)**.

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.