Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
09.04.2011.

VII РАЗРЕД

1. Ако је $a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 = 0$, колико је $a^{2009} - 2009b$?

2. Хипотенузина висина у правоуглом троуглу дели хипотенузу на делови од 9cm и 16cm. Одреди обим и површину тог троугла.

3. Да ли је број $2009 \cdot 2011 - 48$ сложен? Образложи одговор.

4. Нека су P, Q, R, S средишта страница AB, BC, CD, DA редом конвексног четвороугла $ABCD$ и M тачка унутар тог четвороугла, таква да је $APMS$ паралелограм. Докажи да је четвороугао $MQCR$ паралелограм.

5. Одреди четвороцифрени број чији је збир цифара једнак са производом прве две цифре и једнак са двоцифреним завршетком тог четвороцифреног броја.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

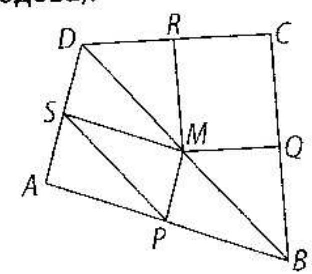
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗЕД

1. (**ML XLIII-5**) Из $a^2 - 2a + 1 + b^2 + 6b + 9 = 0$ добијамо
$$(a-1)^2 + (b+3)^2 = 0 \text{ (10 бодова)}.$$
Одавде је $a = 1$ и $b = -3$ (**5 бодова**) па је $a^{2009} - 2009b = 6028$ (**5 бодова**).

2. Ако са a и b означимо катете троугла, а са h хипотенузину висину, тада је $a^2 = h^2 + 16^2$, $b^2 = h^2 + 9^2$ и $a^2 + b^2 = 25^2$. Одатле је $h = 12$cm, $a = 20$cm и $b = 15$cm (**10 бодова**), па је $O = 60$cm (**5 бодова**) и $P = 150\text{cm}^2$ (**5 бодова**).

3. Овај број је сложен јер је
$$2009 \cdot 2011 - 48 = (2010-1)(2010+1) - 48 = 2010^2 - 1 - 48$$
$$= 2010^2 - 49 = (2010-7)(2010+7) \text{ (20 бодова)}.$$

4. Из $\Delta APS \cong \Delta PBM$ и $\Delta APS \cong \Delta SMD$ следи $PS = DM = MB$ и $PS \parallel BM$ и $PS \parallel MD$. Према томе, B, M и D су колинеарне и M дели дијагоналу на два једнака дела (**15 бодова**). Сада је MR средња линија троугла BCD и $MR \parallel BC$ и $MR = \frac{1}{2}BC = QC$. Према томе $MQCR$ је паралелограм (**5 бодова**).



5. Тражени четвороцифрени број $\overline{abcd}$ задовољава услове $a + b + c + d = a \cdot b$ и $a + b + c + d = \overline{cd}$. Из другог услова добијамо да је $a + b = 9c$, односно $c = 1$ ($c = 2$ даје $a = b = 9$ што је у супротности са првим условом) (**4 бода**). Сада имамо да је $10 + d = a \cdot b$ па за $d = 4$ добијамо решење 2714 и 7214 (**8 бодова**), односно за $d = 8$ добијамо решења 3618 и 6318 (**8 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.