Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
09.04.2011.

VI РАЗРЕД

1. Изабери четири броја из скупа $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}, -\frac{4}{7}\right\}$ тако да њихов производ буде: а) највећи; б) најмањи. Израчунај те производе.

2. Конструиши троугао ABC ако је $\measuredangle ACB = 90°$, $\measuredangle CAB = 15°$ и $CC_1 = 3\text{cm}$, где је C_1 средиште странице AB.

3. Дат је правоугаоник чије су странице 10cm и 67cm. У унутрашњости правоугаонику на случајан начин је распоређено 2011 тачака. Докажи да при ма ком распореду тачака постоје четири тачке које припадају једном истом квадрату странице 1cm.

4. На страници CD квадрата $ABCD$ дата је тачка L. Из темена A и C спуштене су нормале на праву BL и секу је, редом, у тачкама P и Q. Докажи да је $CP = DQ$.

5. Нека су a, b, c различите цифре и све различите од нуле. Да ли збир $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}$ може бити једнак квадрату неког природног броја (број је квадрат неког природног броја ако је производ тог броја са самим собом)?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

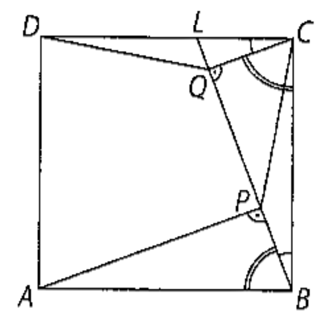
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗЕД

1. а) Производ је највећи када је позитиван, па треба изабрати четири негативна броја. Њихов производ је $\frac{5}{84}$ (**10 бодова**).
   б) Најмањи производ добијамо када изаберемо бројеве $-\frac{4}{7}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}$ и тада је производ $-\frac{1}{14}$ (**10 бодова**).

2. Како је $CC_1 = 3\text{cm}$, то је $AB = 6\text{cm}$ (**5 бодова**). Такође имамо да је $\measuredangle ABC = 75°$ па се задатак своди на конструкцију троугла ако су дати страница и два налегла угла (**5 бодова**). За тачно изведену конструкцију дати **10 бодова**.

3. Поделимо тај правоугаоник на 670 квадрата површине 1cm^2. Ако у сваки од тих квадрата распоредимо по 3 тачке, укупно 2010, у ма који квадрат да ставимо последњу тачку он ће садржати 4 тачке. (**20 бодова**).

4. (**ML XLIII-5**) $\Delta ABP \cong \Delta BCQ$ јер је $AB = BC$, $\measuredangle P = \measuredangle Q = 90°$ и $\measuredangle ABP = 90° - \measuredangle QBC = \measuredangle BCQ$ (**10 бодова**). Сада је $BP = CQ$ и $\measuredangle DCQ = \measuredangle PBC$ па како је $BC = CD$ то је $\Delta PBC \cong \Delta QCD$ (**10 бодова**). Значи, $DQ = CP$.



5. Како је
$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=222\cdot(a+b+c)$ (**5 бодова**)
$=2\cdot3\cdot37\cdot(a+b+c)$ (**5 бодова**), то ће дати збир бити квадрат неког природног броја ако $a+b+c$ буде најмање једнако са $2\cdot3\cdot37$ што је немогуће (a, b, c су једноцифрени бројеви) (**10 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.