Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

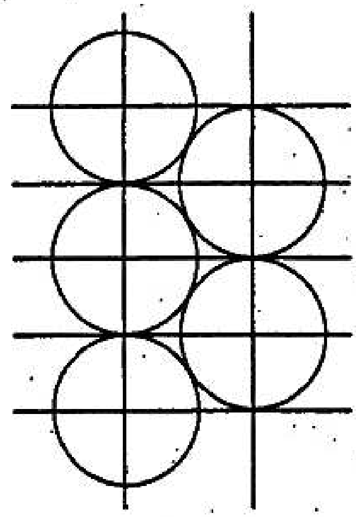
07.03.2009.

VIII РАЗРЕД

1. Реши једначину
$$\left|x+\left|2x+\left|4x\right|\right|\right|=2009\ .$$

2. Три рационална броја a, b и c су таква да је један већи од нуле, један једнак нули и један мањи од нуле. Ако за те бројеве важи
$$\frac{a(c-b)}{b}>0,$$
који од тих бројева је већи, који мањи, а који једнак нули?

3. Колико је растојање (види слику) између суседних правих (водоравних односно усправних) ако су пречници свих кругова по 10cm?



4. Докажи да је број $6^{2n+2}-2^{n+3}\cdot 3^{n+2}+36$ дељив са 900 за сваки природан број n.

5. Основна ивица правилне шестостране призме повећана је за 200%, а висина је смањена за $p\%$. Ако се запремина те призме повећала за $p\%$, одреди да ли се површина омотача повећала или смањила и за колико процената.

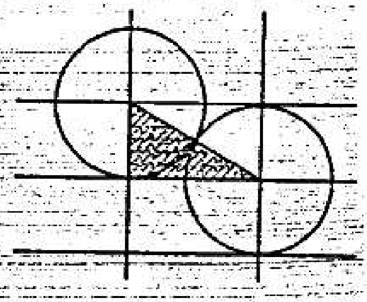
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – VIII РАЗРЕД

1. За $x \geq 0$ имамо $\left|x+\left|2x+|4x|\right|\right| = |x+6x| = 7x = 2009$, одакле је $x = 287$ (**10 бодова**). За $x < 0$ имамо $\left|x+\left|2x+|4x|\right|\right| = |x-2x| = -x = 2009$, одакле је $x = -2009$ (**10 бодова**).

2. $b \neq 0$ јер је именилац разломка (**3 бода**) и $a \neq 0$ јер је производ различит од 0 (**3 бода**). Дакле $c = 0$ (**4 бода**) и $\dfrac{a\cdot(-b)}{b} > 0$, одакле је $-a > 0$, тј. $a < 0$ (**8 бодова**). Одавде је $b > 0$ (**2 бода**).

3. Очигледно да је растојање између хоризонталних правих 10cm (**5 бодова**). Растојање између вертикалних правих добијамо применом Питагорине теореме на шрафирани троугао са слике чија је хипотенуза 20cm и једна катета 10cm, па је тражено растојање $10\sqrt{3}$ cm (**15 бодова**).



4. (ML XLI-6) Како је

$$6^{2n+2} - 2^{n+3}\cdot 3^{n+2} + 36 = 36\cdot\left(6^{2n} - 2^{n+1}\cdot 3^{n} + 1\right)$$
$$= 36\cdot\left(6^{2n} - 2\cdot 6^{n} + 1\right) = 36\cdot\left(6^{n} - 1\right)^2 \quad \textbf{(10 бодова)}$$

и како је $6^n - 1$ дељиво са 5 (**5 бодова**), следи да је дати број дељив са $36\cdot 25$, односно са 900 (**5 бодова**).

5. (ML XLI-4) Нека је a основица, а H висина призме. Тада је основна ивица нове призме $3a$, а висина $\left(1-\dfrac{p}{100}\right)H$ (**3 бода**). Како је запремина нове призме већа за $p\%$ у односу на првобитну, добијамо да је

$$6\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{p}{100}\right)H = \left(1+\frac{p}{100}\right)6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H \quad \textbf{(5 бодова)}.$$

Следи да је $9\left(1-\dfrac{p}{100}\right) = 1+\dfrac{p}{100}$, па је $p=80$ (**5 бодова**). Површина омотача нове призме је $0{,}6\cdot(6\cdot a\cdot H)$ (**4 бода**), што значи да се површина омотача смањила за 40% (**3 бода**).