Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

05.04.2009.

VIII РАЗРЕД

1. Докажи да ребус

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ ABC \\ \underline{+ABCD} \\ 2\,0\,0\,9 \end{array}$$

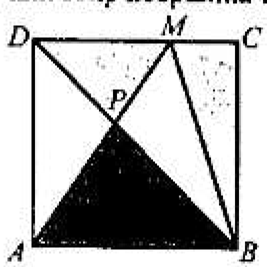
нема решење ако различитим словима одговарају различите, а истим словима исте цифре.

2. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Са S је означен центар те коцке. Израчунај запремину пирамиде A_1BC_1S.

3. Ако за природне бројеве a, b и c важи $a+b+c=2010$, докажи да је $a^3+b^3+c^3$ дељиво са 6.

4. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 20?

5. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је M произвољна тачка на страници CD и пресек дужи AM и BD је тачка P (види слику). Шта је веће: површина троугла ABP или збир површина троуглова MDP и BCM?



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – VIII РАЗРЕД

1. $A+AB+ABC+ABCD=1111A+111B+11C+D=2009$. Одавде је $A=1$ (**5 бодова**). Сада је $111B+11C+D=898$. Како је $11C+D\le 107$, то је $791\le 111B\le 898$ па је $B=8$ (**5 бодова**). Сада је $11C+D=10$. Одавде је једино могуће да је $C=0$ (**5 бодова**), али је тада $D=10$ (што је немогуће јер је D цифра) па дати ребус нема решење (**5 бодова**).
Напомена: Максимално бодовати и сваки други тачан начин решавања.

2. Основна ивица пирамиде је дијагонала стране коцке и једнака је $a\sqrt{2}$ (**4 бода**), а бочна ивица пирамиде је половина дијагонале коцке, тј. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (**4 бода**). Сада Питагорином теоремом добијамо да је висина коцке $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (**6 бодова**). Дакле, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a^3}{12}$ (**6 бодова**).

3. Посматрајмо $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a+b+c\right)=\left(a^3-a\right)+\left(b^3-b\right)+\left(c^3-c\right)$. Сваки од сабирака можемо записати у облику, на пример, $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ (**5 бодова**). Производ три узастопна природна броја је увек дељив са 6 (**5 бодова**), па је и збир три сабирка на десној страни једнакости дељив са 6 (**5 бодова**). Доказали смо да је разлика дељива са 6, а како је умањилац, по претпоставци, дељив са 6, то је и умањеник $a^3+b^3+c^3$ дељив са 6 (**5 бодова**), што је и требало доказати.

4. **(МЛ, XLII-6)** Једна цифра мора бити 5, а производ друге две мора бити дељив са 4 (**4 бода**). Могућа су три случаја: а) Ако су две цифре парне, онда таквих бројева има $3\cdot4\cdot4$ (цифру 5 можемо распоредити на 3 начина, а на свако од преостала два места можемо записати било коју од цифара 2, 4, 6, 8) (**6 бодова**); б) Ако је једна од преостале две цифре дељива са 4, а друга непарна различита од 5, онда таквих бројева има $6\cdot2\cdot4$ (**6 бодова**). в) Ако је једна цифра 5, а друга дељива са 4 таквих има $3\cdot2$ (**4 бода**). Дакле, тражених бројева има 102.

5. Како је $P_{\Delta ABD}=P_{\Delta ABM}=P_{\Delta BCD}$ (**5 бодова**) и

$$P_{\Delta APD}=P_{\Delta ABD}-P_{\Delta ABP}=P_{\Delta ABM}-P_{\Delta ABP}=P_{\Delta BMP}\ \textbf{(5 бодова)}$$

онда је

$$P_{\Delta ABP}=P_{\Delta ABD}-P_{\Delta APD}=P_{\Delta BCD}-P_{\Delta BMP}=P_{\Delta MDP}+P_{\Delta BCM}\ \textbf{(10 бодова)}.$$