Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

07.03.2009.

VII РАЗРЕД

1. Докажи да вредност израза $\frac{\left(8^5\right)^{4n}}{\left(32^{3n}\right)^4}$ не зависи од n.

2. Упрости израз $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}+2\sqrt{3}$ ако је $x=2-\sqrt{3}$.

3. У једнакостранични троугао странице 6cm, уписан је круг, а у круг је уписан квадрат. Израчунај површину тог квадрата. Који део површине троугла заузима површина квадрата?

4. За четвороугао $ABCD$ је познато да је $AB=4$cm, $BC=4\sqrt{2}$ cm, $CD=\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle ABC=45^0$ и $\sphericalangle BCD=90^0$. Израчунај обим и површину тог четвороугла.

5. На фудбалској утакмици у једном реду седишта на трибинама сео је известан број гледалаца. Затим је између свака два гледаоца сео још по један гледалац. Овакав начин заузимања места (седишта) поновио се укупно три пута (још 2 пута), па је после тога у том реду било 2009 гледалаца. Колико је гледалаца на почетку село у овај ред?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

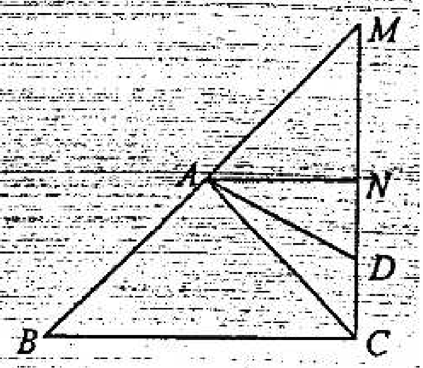
РЕШЕЊА – VII РАЗРЕД

1. $\dfrac{\left(8^5\right)^{4n}}{\left(32^{3n}\right)^4}=\dfrac{8^{20n}}{32^{12n}}$ (5 бодова) $=\dfrac{\left(2^3\right)^{20n}}{\left(2^5\right)^{12n}}=\dfrac{2^{60n}}{2^{60n}}=1$ (15 бодова).

2. (ML, XLIII-1) $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}+2\sqrt{3}=|x+1|-|x-1|+2\sqrt{3}$ (5 бодова). Заменом вредности за x имамо

$$|x+1|-|x-1|+2\sqrt{3}=\left|2-\sqrt{3}+1\right|-\left|2-\sqrt{3}-1\right|+2\sqrt{3}$$
$$=\left|3-\sqrt{3}\right|-\left|1-\sqrt{3}\right|+2\sqrt{3}=3-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)+2\sqrt{3}$$
$$=4 \text{ (15 бодова).}$$

3. (ML, XLIII-2) Површина једнакостраничног троугла је $P_t=9\sqrt{3}$ cm^2 (3 бода). Полупречник уписаног круга у овај троугао је $r=\sqrt{3}$ cm (3 бода). Дијагонала квадрата једнака је пречнику круга, па је онда дијагонала $d=2\sqrt{3}$ cm (3 бода). Површина квадрата ће бити $P_k=6$cm^2 (5 бодова). Да би одредили који део површине заузима површина квадрата поделићемо површину троугла површином квадрата и добијамо $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ (6 бодова).



4. Означимо пресечну тачку правих AB и CD са M, а подножје нормале из A на CD са N. ΔBCM је једнакокрако правоугли па је $MC=4\sqrt{2}$ cm и $BM=8$cm (2 бода). Како је $AB=4$cm, тачка A је средиште хипотенузе и $AN=2\sqrt{2}$ cm (средња линија ΔBCM) (2 бода). Сада је N средиште дужи MC, и $NC=2\sqrt{2}$ cm. Из правоуглог троугла AND рачунамо да је $AD=\sqrt{10}$ cm (4 бода).

Сада је $O_{ABCD}=(4+5\sqrt{2}+\sqrt{10})$cm (4 бода). Површину рачунамо као

$$P_{ABCD}=P_{ABC}+P_{ACD}=8\text{cm}^2+2\text{cm}^2=10\text{cm}^2 \text{ (8 бодова).}$$

5. Ако је на почетку у реду о коме је реч село n гледалаца, онда је првом „попуном" у ред село још $n-1$ (4 бода), другом попуном још $2n-2$ (4 бода) и трећом „попуном" још $4n-4$ гледалаца (4 бода), тако да је

$$n+(n-1)+(2n-2)+(4n-4)=2009, \text{ одакле је } n=252 \text{ (8 бода).}$$