

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

05.04.2009.

VII РАЗРЕД

- Докажи да је број $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ квадрат неког природног броја.
- Израчунај површину правоуглог троугла чији је обим 36cm, ако за странице тог троугла важи $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$ (a и b су катете, c хипотенуза).
- Нека је $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 57$. Одреди све природне бројеве n за које је број m квадрат неког природног броја.
- Од квадрата су одрезана 4 правоугла троугла тако да је добијен правилан осмоугао. Израчунај површину тог осмоугла ако је страница квадрата 10cm.
- Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 15?

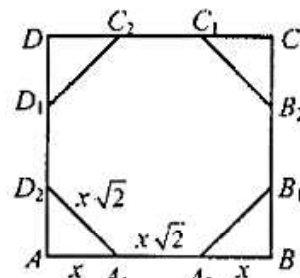
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА – VII РАЗРЕД

- $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = (2^2)^9 + 2^{10} \cdot 3^{10} + (3^{10})^2 = (2^9)^2 + 2 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} + (3^{10})^2 = (2^9 + 3^{10})^2$ (20 бодова)
- (МЛ, XLIII-4) Обим правоуглог троугла је $O = a+b+c = 36\text{cm}$. Како је $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$, то додавањем броја 1 левој и десној страни добијамо $\frac{a+b+c}{c} = \frac{12}{5}$ (5 бодова). Заменом $a+b+c=36$ у $\frac{a+b+c}{c} = \frac{12}{5}$ добијамо $\frac{36}{c} = \frac{12}{5}$, одакле је $c=15$ (5 бодова). Сада из $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$ закључујемо да је $a+b=21$ (5 бодова), а $a^2 + 2ab + b^2 = 441$. На основу Питагорине теореме је $a^2 + b^2 = 225$, па заменом у $a^2 + 2ab + b^2 = 441$ добијамо $ab=108$. Како је $P = \frac{ab}{2}$ то је тражена површина 54cm^2 (5 бодова).
- За $n=1$ је $m=58$, за $n=2$ је $m=59$, за $n=3$ је $m=63$, па n није 1, 2 или 3. За $n=4$ је $m=81=9^2$ (12 бодова). Како за $n>4$ цифра јединица броја m је 7, само број 4 испуњава услове задатка (8 бодова).
- Троуглови које смо одсекли су једнакокрако правоугли (3 бода). Претпоставимо да је катета тог троугла x . Питагорином теоремом добијамо да је страница осмоугла $x\sqrt{2}$ (3 бода). Како је страница a квадрата састављена од две катете троугла и једне странице осмоугла, то је $a = 2x + x\sqrt{2}$. Сада је $x = \frac{10}{2+\sqrt{2}} = 5(2-\sqrt{2})\text{cm}$ (5 бодова).



Површину осмоугла добијамо када од површине квадрата одузмемо површине троуглова које смо одрезали, па је

$$P = P_k - 4 \cdot P_{\Delta} = 100 - 4 \cdot \frac{25(2-\sqrt{2})^2}{2} = 200(\sqrt{2}-1)\text{cm}^2 \text{ (9 бодова).}$$

- Једна цифра је 5, а друга мора бити дељива са 3 (3, 6, 9) (5 бодова).
1) Ако је једна цифра 5, друга дељива са 3, а трећа није дељива ни са 3 ни са 5, укупан број могућности је $6 \cdot 3 \cdot 5 = 90$ (3 цифре на 3 позиције можемо распоредити на 6 начина. 3 цифре су дељиве са 3 и 5 шифара није дељиво ни са 3 ни са 5) (5 бодова).
2) Ако је једна цифра 5, а свака од две преостале цифре је дељива са 3, укупан број могућности је $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ (цифру 5 можемо распоредити на 3 начина и за сваку од преостале 3 цифре имамо 3 могућности) (5 бодова).
3) Ако су 2 цифре 5, а трећа дељива са 3 укупан број могућности је $3 \cdot 3 = 9$ (цифру дељиву са 3 можемо распоредити и одабрати на по 3 начина). Дакле укупан број могућности је 126 (5 бодова).