Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
19.04.2008 – VIII РАЗРЕД

1. Одреди решења једначине $|x - |x - |x||| = 2\ 008$.

2. Теме A троугла ABC је нула линеарне функције $y = \frac{3}{4}x + 12$, а теме B је нула линеарне функције $y = -\frac{4}{3}x + 12$. Теме C је заједничка тачка графика тих линеарних функција.

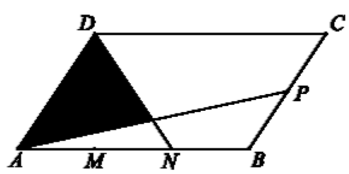
а) Докажи да је троугао ABC правоугли.

б) Израчунај обим и површину троугла ABC.

3. Од папира облика квадрата површине $50cm^2$ изрезана је мрежа правилне четворостране пирамиде тако да се при састављању темена квадрата састају у врху пирамиде (темена квадрата су врхови троугла мреже те пирамиде). За ту пирамиду се зна да је ивица основе два пута мања од висине бочне стране. Колико процената површине квадрата чини површина мреже?

4. Велика коцка је састављена од малих коцки једнаких ивица, али које су обојене црвеном, плавом или белом бојом. Од укупног броја, $\frac{13}{72}$ коцки је црвене боје, а $\frac{25}{48}$ је беле боје. Број плавих коцки је мањи од $1\ 000$. Колико има плавих коцки, а колико укупно малих коцки?

5. Тачке M и N деле страницу AB паралелограма $ABCD$ на три једнака дела. Тачка P је средиште странице BC. Који део површине паралелограма чини осенчени део?



Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – VIII РАЗРЕД

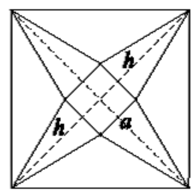
1. За $x \geqslant 0$, добијамо $|x-|x-|x|||=|x-|x-x||=|x|=x$, па је $x = 2\ 008$ једно решење **(10 бодова)**.

За $x < 0$, добијамо $|x-|x-|x|||=|x-|x+x||=|x+2x|=-3x$, па је $x=-\frac{2\ 008}{3}$ још једно решење једначине **(10 бодова)**.

2. а) Како је $\frac{3}{4}x+12=0$ за $x=-16$ **(2 бода)** то су координате тачке $A(-16,0)$ **(1 бод)**. Слично, за $-\frac{4}{3}x+12=0$ добијамо $x=9$ **(2 бода)**, па су координате тачке $B(9,0)$ **(1 бод)**. Из $\frac{3}{4}x+12=-\frac{4}{3}x+12$ добијамо $x=0$ **(2 бода)**, па је $C(0,12)$ **(1 бод)**. Дужине страница овог троугла су $a=15$, $b=20$ и $c=25$ **(3 бода)**, а како је $c^2=a^2+b^2$ то је троугао ABC правоугли **(4 бода)**.

б) $O_{ABC}=60$ **(2 бода)**, $P_{ABC}=300$ **(2 бода)**.

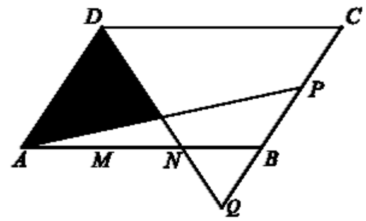
3. За добро нацртану слику **4 бода.** Страница квадрата је $5\sqrt{2}cm$ **(2 бода)**, а његова дијагонала $10cm$**(2 бода)**. Сада је $10=a+2h$ и како је $h=2a$, добијамо да је $a=2cm$ и $h=4cm$ **(6 бодова)**. Површина пирамиде је $P=2^2+4\cdot\frac{4\cdot 2}{2}=20cm^2$ **(3 бода)** што је 40% од површине квадрата **(3 бода)**.



4. Укупан број коцки је n^3 ($n\in\mathbb{N}$), па како је $\frac{13}{72}$ црвених и $\frac{25}{48}$ белих то n^3 мора бити дељиво са 72 и 48 **(4 бода)**. Како је $72=3^2\cdot 2^3$ и $48=3\cdot 2^4$ то је $n^3=3^3\cdot 2^6\cdot k^3$ **(4 бода)**. Како је $\frac{13}{72}=\frac{312\cdot k^3}{12^3k^3}$ **(2 бода)** од укупног броја црвених, а $\frac{25}{48}=\frac{900\cdot k^3}{12^3k^3}$ **(2 бода)** белих, то је плавих $\frac{516\cdot k^3}{12^3k^3}$ **(2 бода)**. Међутим, плавих је мање од $1\ 000$ па је $k=1$ **(2 бода)**. Број плавих коцки је 516 **(2 бода)**, а укупно их је $12^3=1\ 728$ **(2 бода)**.

Напомена: Ако је нађен одговарајући број плавих коцки и укупан број коцки, а није показано да је $k=1$, дати 18 бодова.

5.



Продужавајући BC и DN тако да се одговарајуће праве секу у тачки Q, непосредно се види да је $\triangle\ AND \sim \triangle\ BNQ$ **(5 бодова)** па је сада $BQ = \frac{1}{2}AD$ **(5 бодова).** Како је $PQ = AD$ то је $AQPD$ паралелограм чију једну четвртину чини осенчени део **(5 бодова).** Како је $P_{ABCD} = P_{AQPD}$ (једнаке су им страница и одговарајућа висина) то осенчени део чини $\frac{1}{4}$ површине паралелограма $ABCD$ **(5 бодова).**