

Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

19.04.2008.

VII РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза

$$\sqrt{(\sqrt{2\,008} - 45)^2} + \sqrt{(44 - \sqrt{2\,008})^2}.$$

2. У правоуглом троуглу је $t_a = 2\sqrt{13}\text{cm}$ и $t_b = \sqrt{73}\text{cm}$. Израчунај хипотенузу тог правоуглог троугла.

3. Дат је правилан осмоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, чија је страна $a = 8\text{cm}$. Израчунај површину троугла $A_1A_2A_5$.

4. Да ли је израз

$$1\,004^2 - 1\,003^2 + 1\,002^2 - 1\,001^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

дељив са 2 008?

5. Природан број зовемо "симпатичним" ако је производ његових цифара паран. Колико има "симпатичних" шестоцифрених бројева?

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

VII РАЗРЕД

1. Важи $44 < \sqrt{2\,008} < 45$ (5 бодова), па је

$$\sqrt{(\sqrt{2\,008} - 45)^2} = |\sqrt{2\,008} - 45| = 45 - \sqrt{2\,008} \text{ (5 бодова) и}$$

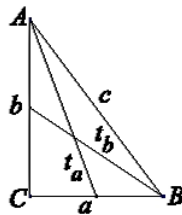
$$\sqrt{(44 - \sqrt{2\,008})^2} = |44 - \sqrt{2\,008}| = \sqrt{2\,008} - 44 \text{ (5 бодова).}$$

$$\text{Сада је } \sqrt{(\sqrt{2\,008} - 45)^2} + \sqrt{(44 - \sqrt{2\,008})^2} = 1 \text{ (5 бодова).}$$

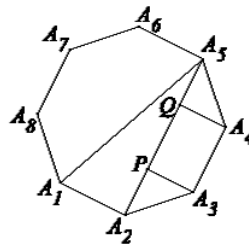
2. Како је $b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = t_a^2 = 52$ (3 бода) и $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = t_a^2 = 73$ (3

бода), то је $\left(b^2 + \frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{4} + a^2\right) = 125$, одакле је $\frac{5}{4}(a^2 + b^2) = 125$

(4 бода), тј. $\frac{5}{4}c^2 = 125$ (4 бода). Дакле $c = 10\text{ cm}$ (4 бода).



Слика уз задатак 2



Слика уз задатак 3

3. Четвороугао $A_2A_3A_4A_5$ је једнакокраки трапез (2 бода). Нека су P и Q подножја нормала из тачака A_3 и A_4 , редом, на A_2A_5 . Како је A_3A_4QP правоугаоник, то је $PQ = 8\text{ cm}$ (4 бода). Како је $\angle A_3A_4A_5 = 135^\circ$, то је $\angle QA_4A_5 = 45^\circ$ (2 бода), па је троугао QA_4A_5 једнакокрако-правоугли и његова хипотенуза је 8 cm . Одатле добијамо да је $QA_5 = 4\sqrt{2}\text{ cm}$ (4 бода). Сада је $A_2A_5 = 8 \cdot (1 + \sqrt{2})\text{ cm}$ (4 бода), па је тражена површина $32 \cdot (1 + \sqrt{2})\text{ cm}^2$ (4 бода).

4. У датом изразу има 502 разлике квадрата (2 бода)

$$(1\,004^2 - 1\,003^2) + (1\,002^2 - 1\,001^2) + \dots + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2).$$

Када раставимо сваку од ових разлика квадрата на чиниоце, један

чиницац ће бити 1, па добијамо следећи збир од 502 сабирка (**6 бодова**)

$$2\,007 + 2\,003 + \dots + 7 + 3.$$

Ако групишемо први и последњи сабирак, други и претпоследњи, $\dots$, имамо да је тражени збир $251 \cdot 2\,010$ (**8 бодова**). Како $8 \mid 2\,008$, а $8 \nmid 2\,010$, закључујемо да дати израз није дељив са 2 008 (**4 бола**).

5. Број је "симпатичан" ако је барем једна његова цифра парна (**3 бола**). Шестоцифрени бројеви који нису "симпатични" у свом запису имају само непарне цифре, а њих је укупно $5^6 = 15\,625$ (**7 бодова**). Како шестоцифрених бројева има 900 000 (**7 бодова**), то "симпатичних" има $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$ (**3 бола**).