Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

19.04.2008.

VI РАЗРЕД

1. Ако је $\frac{a}{b} = \frac{1}{20}$, израчунај вредност израза
$$\frac{a}{2b} + \frac{2a}{b} + 90a - 4,5b.$$

2. Одреди цифре a и b ($a \neq b$) тако да број $0,\overline{abab\ldots}$ буде једнак нескративом разломку за који је збир имениоца и бројиоца једнак 17.

3. Конструиши троугао ABC ако је познато $a + c = 8cm$, $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

4. Одреди све просте бројеве p, q и r такве да је
$$p \cdot (264q + 4r) = 2008.$$

5. Страница ромба $ABCD$ је $12cm$, а $\measuredangle BAD = 60^\circ$. Тачке P и Q су средишта страница BC и CD, редом. Праве AP и AQ секу дијагоналу BD у тачкама M и N. Израчунај дужину дужи MN.

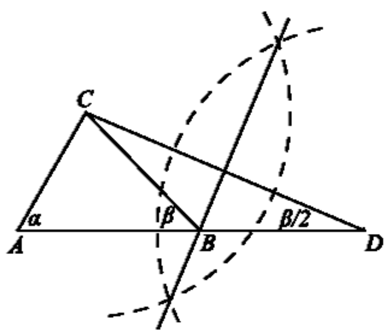
Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

VI РАЗРЕД

1. Како је $\frac{a}{b}=\frac{1}{20}$, то је $a=\frac{b}{20}$ **(5 бодова)**. Полазни израз постоје $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{b}+2\cdot\frac{a}{b}+4,5b-4,5b$ **(10 бодова)**, одакле је вредност полазног израза $\frac{1}{8}$ **(5 бодова)**.

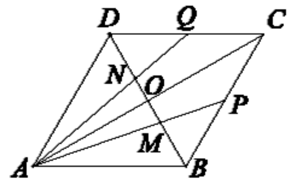
2. Ако је $x=0,\overline{abab\ldots}$, тада је $100x=ab,\overline{abab\ldots}$ **(2 бода)**. Из ове две једнакости добијамо да је $99x=\overline{ab}$ **(2 бода)**, односно $x=\frac{\overline{ab}}{99}=\frac{10a+b}{9\cdot 11}$ **(4 бода)**. Како је збир бројиоца и имениоца несводљивог разломка 17, то мора да $9\mid 10a+b$ или $11\mid 10a+b$ **(2 бода)**. Ако $11\mid 10a+b$ то је $10a+b=11\cdot(17-9)=88$, одакле је $a=b=8$. Међутим, како је $a\neq b$, ово не може бити решење **(5 бодова)**. Ако $9\mid 10a+b$, то је $10a+b=9\cdot(17-11)=54$, одакле је $a=5$ и $b=4$ **(5 бодова)**.



3. Нека је дат троугао ABC. Продужимо страницу AB преко темена B за дужину a и добијамо тачку D ($|AD|=a+c$). Троугао CBD је једнакокраки **(4 бода)** и угао β је његов спољашњи угао, па је $\measuredangle BDC=\frac{\beta}{2}$ **(4 бода)**. Такође, теме B, врх тог троугла, налази се на симетрали странице CD **(2 бода)**. Дакле, прво конструишемо троугао ADC чија је страница $a+c$ и углови α и $\frac{\beta}{2}$, чиме добијамо темена A и C **(5 бодова)**, а у пресеку симетрале дужи CD и AD добијамо и теме B **(5 бодова)**.

4. $4p\cdot(66q+r)=2008$; $p\cdot(66q+r)=502=2\cdot 251$ **(4 бода)**; Како је $66q+r>2$, то је $p=2$ и $66q+r=251$ **(4 бода)**. Из $66q<251$, имамо $q < 4$ **(4 бода).** За $q = 2$ је $r = 119 = 7 \cdot 17$ па ово не може бити решење **(4 бода)**, а за $q = 3$ је $r = 53$ што је и решење задатка **(4 бода).**

5.



Троугао ABD је једнакостраничан ($\measuredangle BAD = 60^\circ$ и $BA = AD$) па је $BD = 12cm$ **(3 бода).** Означимо пресечну тачку дијагонала са O. Тада је $BO = 6cm$. Тачка M је тежиште троугла ABC **(5 бодова)** (пресек тежишних дужи AP и BO). Како тежиште дели тежишну дуж у односу $2:1$, то је $OM = \frac{1}{3}BO = 2cm$ **(5 бодова).** Аналогно, N је тежиште троугла ACD, и $NO = 2cm$ **(2 бода).** Дакле, $MN = MO + NO = 4cm$ **(5 бодова).**