Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

21.04.2007.

7. РАЗРЕД

1. Доказати да је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}} > 3$.

2. У квадрат чија је дужина странице 10 cm уписан је правилни дванаестоугао, тако да свакој страници квадрата припада по једна страница дванаестоугла. Израчунати дужину странице тог дванаестоугла.

3. Упоредити бројеве $3^{2007} - 2^{3000}$ и $2007 \cdot 2^{2007}$.

4. Испитати да ли постоји троугао чије су дужине висина 1 cm, 2 cm и 3 cm.

5. Одредити колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу цифара 1, 2 и 3, али тако да се ниједна од тих цифра не појављује више од два пута у запису броја.

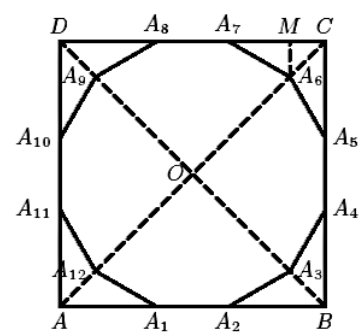
Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.
Забрањена је употреба калкулатора и мобилних телефона.

7. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. (МЛ 1, год. 2004/5, стр. 33, зад. 2371) Из $\sqrt{17} > 4$ и $\sqrt{37} > 6$ следи $\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}} > \sqrt{10}$. (10 бодова) Како је $\sqrt{10} > 3$ и $\sqrt{2} > 1$, то је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}} > \sqrt{5+3+1}$, па следи тражена неједнакост. (10 бодова)

2. Обележимо темена дванаестоугла словима $A_1, A_2, \ldots A_{12}$, а темена квадрата словима A, B, C и D (као на слици). Нека је дужина странице дванаестоугла једнака x (у cm). Обележимо са M подножје нормале из A_6 на страницу квадрата CD. У правоуглом троуглу A_6MA_7 угао A_6A_7M једнак је $30°$ као спољашњи угао правилног дванаестоугла. Због тога је $A_6M = \frac{x}{2}$, а $A_7M = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. (8 бодова) Троугао A_6CM је једнакокрако правоугли, па је $MC = \frac{x}{2}$. (5 бодова) Како је $A_8D = A_7C$, то је $CD = x + 2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x}{2})$. (4 бода) Следи да је $x\cdot(2+\sqrt{3}) = 10$, па је $x = 10\cdot(2-\sqrt{3})$. (3 бода)



3. Пођимо од очигледне неједнакости $3^2 > 2^3$. Степеновањем добијамо да је $3^{2000} > 2^{3000}$. (4 бода) Следи да је $3^{2007} > 3^7\cdot 2^{3000}$ (6 бодова), па је $3^{2007} - 2^{3000} > (3^7-1)\cdot 2^{3000}$ (4 бода). Како је $3^7 - 1 > 2007$, то је $(3^7-1)\cdot 2^{3000} > 2007\cdot 2^{2007}$. (4 бода) Према томе, $3^{2007} - 2^{3000} > 2007\cdot 2^{2007}$. (2 бода)

4. Претпоставимо да постоји такав троугао. Ако са P означимо његову површину (у cm^2), онда користећи формулу за површину троугла добијамо да су дужине страница (у cm) тог троугла $\frac{2P}{1}$, $\frac{2P}{2}$ и $\frac{2P}{3}$. (5 бодова) Како је $\frac{2P}{1} > \frac{2P}{2} + \frac{2P}{3}$, то је дужина једне странице тог троугла већа од збира дужина друге две странице. То је немогуће, па следи да такав троугао не постоји. (15 бодова)

5. Такви четвороцифрени бројеви могу да буду записани са две цифре које се појављују по два пута или са три цифре од којих се једна појављује два пута, а остале две по једном. У првом случају, на три начина бирамо које две цифре се појављују по два пута у запису броја. (3 бода) Нека су то на пример неке цифре a и b. Бројеви

записани помоћу њих су: $aabb$, $abab$, $abba$, $baba$, $baab$ и $bbaa$. (5 бодова) Према томе, у том случају има $3 \cdot 6$, односно 18 бројева. (2 бода) У другом случају, на три начина бирамо цифру која се у запису броја појављује два пута (3 бода), на четири начина бирамо место на коме је једна од цифара које се у том запису појављују једном, а на три начина бирамо место на коме је друга од цифара које се у том запису појављују једном (5 бодова). У том случају има $3 \cdot 4 \cdot 3$, односно 36 бројева. (2 бода) Укупно има 54 броја са датом особином.