Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

11.03.2006.

5. РАЗРЕД

1. Одредити све парове цифара x и y тако да важи $\frac{x}{5} - \frac{2}{y} = \frac{4}{5}$.

2. Означимо са $*$ операцију на скуповима дефинисану са $A * B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Одредити $A * B$ ако је $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 500 \leq x \leq 2005\}$, а $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x \text{ паран}, 1000 \leq x \leq 2006\}$.

3. Збир два угла износи $\frac{8}{9}$ правог угла, а један од њих је за четвртину правог угла већи од другог. Колики су ти углови?

4. Множењем два двоцифрена броја добија се број у чијем се запису појављују једино седмице. Одредити све такве парове двоцифрених бројева.

5. У једној години је било 53 петка. Ако је 1. јануар био четвртак, који дан је био 1. април?

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

5. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

1. Провером за $x \in \{0, 1, \dots, 9\}$ добијају се два решења: $x = 6$, $y = 5$ и $x = 9$, $y = 2$. (свако решење по 10 бодова)

2. Како је по услову задатка $A = \{500, 501, \dots, 2005\}$ и $B = \{1000, 1002, \dots, 2006\}$, добијамо да је $A \setminus B = \{500, 501, \dots, 999, 1001, 1003, \dots, 2005\}$ (7 бодова) и $B \setminus A = \{2006\}$. (7 бодова) Следи да је $A \star B = \{500, 501, \dots, 999, 1001, 1003, \dots, 2005, 2006\}$. (6 бодова)

3. Означимо већи угао са α, а мањи са β. Како је $\frac{8}{9}$ правог угла $80°$, а $\frac{1}{4}$ правог угла $22°30'$, то је $\alpha = \beta + 22°30'$, а $\alpha + \beta = 80°$. Одатле следи да је $2\beta + 22°30' = 80°$, па је $2\beta = 57°30'$. (10 бодова) Коначно, добијамо да је $\beta = 28°45'$, (5 бодова) а $\alpha = 51°15'$. (5 бодова)

4. Множењем два двоцифрена броја добија се број који може имати или 3 или 4 цифре, јер је $10 \cdot 10 = 100$, а $99 \cdot 99 = 9801$. Како је $7777 = 7 \cdot 11 \cdot 101$, а 101 је прост број, следи да производ два двоцифрена броја не може бити 7777. (10 бодова) С обзиром да је $777 = 3 \cdot 7 \cdot 37$, једини двоцифрени бројеви који задовољавају услове задатка су 21 и 37. (10 бодова)

5. Сем 2. јануара који је био петак, у години је било још 52 петка, што значи да је та година имала $2 + 7 \cdot 52 = 366$ дана, тј. да је била преступна. (10 бодова) У таквој години, између 1. јануара и 1. априла има тачно $30 + 29 + 31 = 90$ дана, што значи да је 1. април 92. дан у години. Како је $92 = 7 \cdot 13 + 1$, а 1. јануар је био четвртак, следи да је 1. април био такође четвртак. (10 бодова)